24th Duel - 2016
Category A Individual Solutions by Marian Poljak, GJŠ Přerov

A–I–1

Problem

Find the largest positive integer n with the following property:
The product $(k+1)\cdot(k+2)\cdot(k+3)\cdot\ldots\cdot(k+2016)$ is divisible by 2016^n for every positive integer k.

Solution

Vyjdeme z poznatku, že $2016 = 2^5\cdot 3^2\cdot 7$. Určíme, kolikrát nejméně-krát je zadaný výraz dělitelný prvočíslem 7. Neboli, jakou nejvyšší mocninou čísla 7 je zadaný výraz vždy, pro libovolné k, dělitelný.
Úvahou, že mezi 2016 po sobě jdoucími čísly alespoň $\frac{2016}{7}=288$ dělitelných 7, $\left\lfloor\frac{288}{7}\right\rfloor$ dělitelných 49 atd., můžeme tento minimální exponent určit: $288+41+5=334$.
Výraz je tedy pro libovolné k vždy dělitelný číslem 7^{334}, ale nikoliv již číslem 7^{335} (protipříkladem může být např. $k=7^{10}$ nebo jiná vysoká mocnina 7).
Jelikož $2016^n = 2^{5n}\cdot 3^{2n}\cdot 7^n$, musí být proto nutně $n\le 334$.
Dokážeme však, že $n=334$ vyhovuje, tzn., že výraz je pro všechna k vždy dělitelný čísly $2^{5\cdot 334}$ i $3^{2\cdot 334}$. K tomu stačí ukázat, že zadaný výraz obsahuje odpovídající činitel pro všechna k vícekrát, než potřebujeme.
Postup k tomu bude analogický, opět použijeme vzorec pro minimální exponent:

$$\left\lfloor\frac{2016}{2}\right\rfloor+\left\lfloor\frac{2016}{4}\right\rfloor+\ldots=1008+504+252+126+\ldots>1890>5\cdot 334$$

$$\left\lfloor\frac{2016}{3}\right\rfloor+\left\lfloor\frac{2016}{9}\right\rfloor+\ldots=672+224+\ldots>2\cdot 334$$

Výraz je tedy vždy dělitelný $2^{5\cdot 334}, 3^{2\cdot 334}$ i 7^{334}, ale nikoliv však 7^{335}.

Nejvyšší možné n je tedy 334.

A–I–2

Problem

In the domain of real numbers, solve the system of equations

$$x = p^2 + y^2$$
$$y = q^2 + z^2$$
$$z = r^2 + x^2$$

with non-negative real parameters *p, q, r* satisfying $p + q + r = \frac{3}{2}$.

Solution

Sečteme všechny 3 rovnice (důsledková úprava):

$$x + y + z = p^2 + q^2 + r^2 + x^2 + y^2 + z^2$$

Ze známé nerovnosti $3(p^2 + q^2 + r^2) \geq (p + q + r)^2$, která jednak vyplývá z Cauchy–Schwarzovy nerovnosti, či úpravou zřejmé nerovnosti $2[(p - q)^2 + (q - r)^2 + (r - p)^2] \geq 0$, dostaneme následující odhad: $p^2 + q^2 + r^2 \geq \frac{(p+q+r)^2}{3} = \frac{\left(\frac{3}{2}\right)^2}{3} = \frac{3}{4}$ (Platí $\forall\, p, p, r \in \mathbb{R}_0^+$)

Dosadíme, rovnice nám tedy přejde v nerovnici, která však pro řešení soustavy nutně musí platit:

$$x + y + z = p^2 + q^2 + r^2 + x^2 + y^2 + z^2 \geq \frac{3}{4} + x^2 + y^2 + z^2$$

Nerovnici vzniklou dosazením upravíme:

$$0 \geq \left(x^2 - x + \frac{1}{4}\right) + \left(y^2 - y + \frac{1}{4}\right) + \left(z^2 - z + \frac{1}{4}\right)$$

$$0 \geq \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(z - \frac{1}{2}\right)^2$$

Zřejmě tedy vidíme, že nerovnici může vyhovovat pouze jediná trojice reálných čísel $(x, y, z) = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$

Tato trojice pro $(p, q, r) = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ skutečně vyhovuje všem třem rovnicím, o čemž se přesvědčíme zde nutnou zkouškou. Podmínka $p + q + r = \frac{3}{2}$ je samozřejmě v tomto případě splněna.

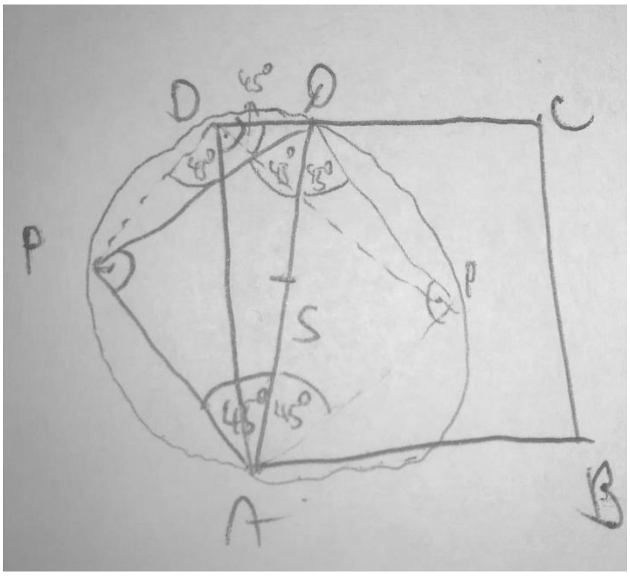
Soustava rovnic má jediné řešení: $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}) = \left(\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}, \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}, \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}\right)$

A–I–3

Problem

We are given a square $ABCD$ in the plane. Find the locus of vertices P of all right-angled isosceles triangles APQ with the right angle at P such that the vertex Q lies on the side CD of the given square.

Solution

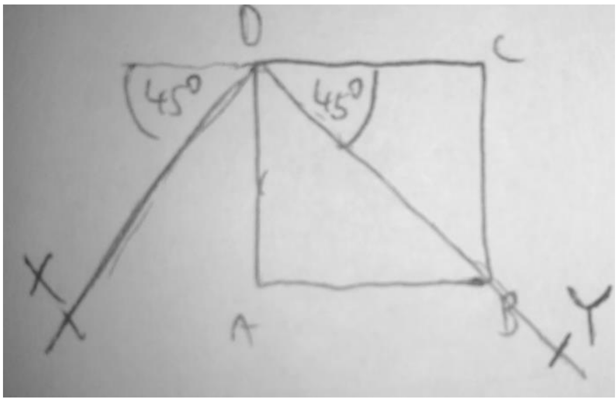


Pro každou polohu bodu Q vyhovují zadáním 2 různé body P. Jeden z nich leží ve stejné polorovině s D podle přímky AQ, druhý ne.

Je-li u vrcholu P ze zadání pravý úhel, můžeme okamžitě výrazně omezit množinu bodů P. Jelikož bude úsečka AQ viděna pod pravým úhlem jak z vrcholu P, tak z vrcholu D, bude čtyřúhelník $APQD$ (nebo $AQDP$, záleží na tom, v jaké polorovině vůči AQ je bod P) vždy tětivový. Označíme-li S střed úsečky AQ, budou body $APQD$ vždy ležet na Thaletově kružnici se středem S.

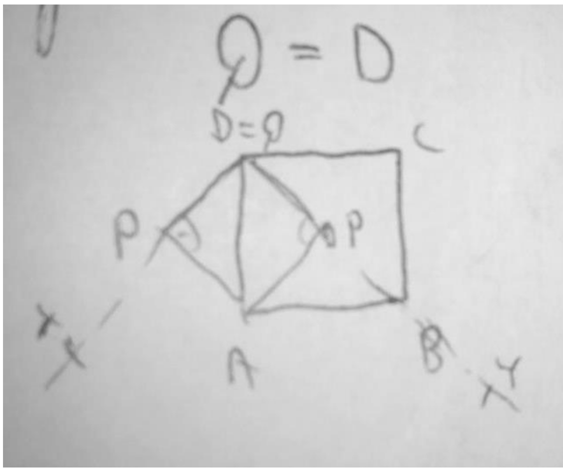
Jelikož je AQP ze zadání nejen pravoúhlý, ale i rovnoramenný, můžeme jednoznačně určit jeho vnitřní úhly: $90^\circ, 45^\circ, 45^\circ$. potom však z obvodových úhlů platí: $45^\circ = |\sphericalangle PQA| = |\sphericalangle PDA|$ (pro čtyřúhelník $PAQD$) nebo $45^\circ = |\sphericalangle PAQ| = |\sphericalangle QDP| = $
$= |\sphericalangle CDP|$ (pro čtyřúhelník $PQAD$).

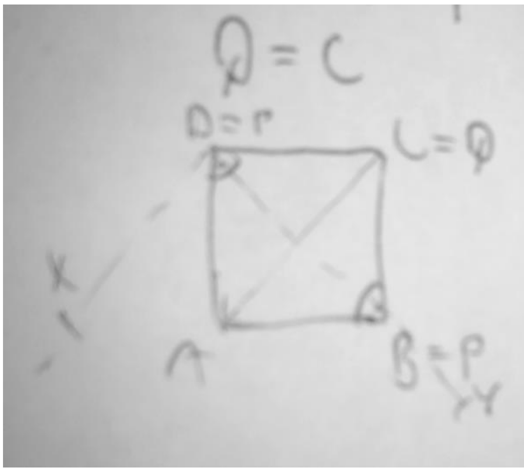
Bod P tedy musí nutně ležet buď na polopřímce DX nebo DY, viz následující obrázek (a to nezávisle na poloze bodu Q)



Jinak řečeno, zúžili jsme množinu hledaných bodů P na polopřímky odkloněné od CD pod úhlem 45° z bodu C směrem „dolů“, k dolní straně AB čtverce.

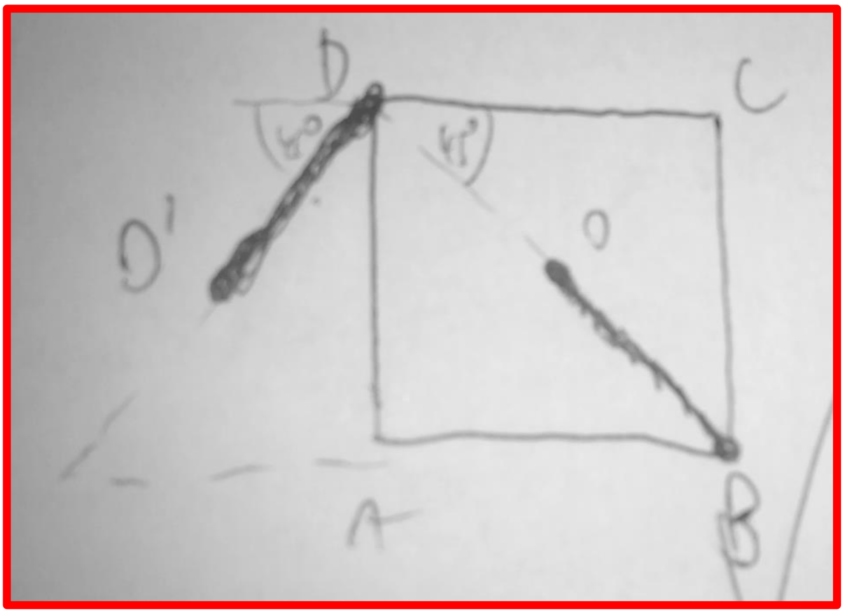
Nyní si stačí uvědomit 2 speciální případy, totiž kdy $Q = D$ a $Q = C$:



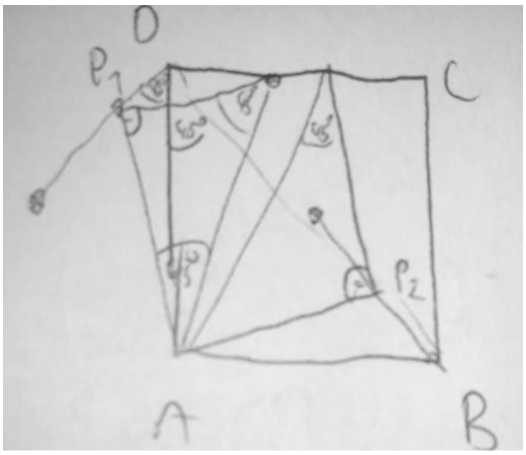


Všechny ostatní případy budou něco mezi tím.

Hledaná množina bude tedy vypadat takto (jako sjednocení dvou úseček):

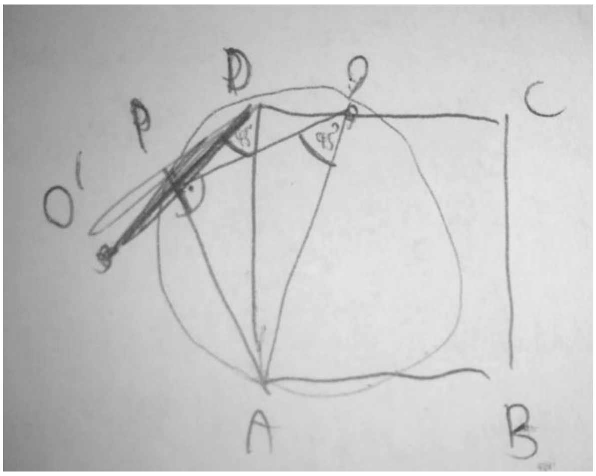


Označíme-li tedy O střed čtverce $ABCD$ a O' jeho zrcadlový obraz podle AD, pak budou řešením úsečky OB a $O'B$ včetně krajních bodů.



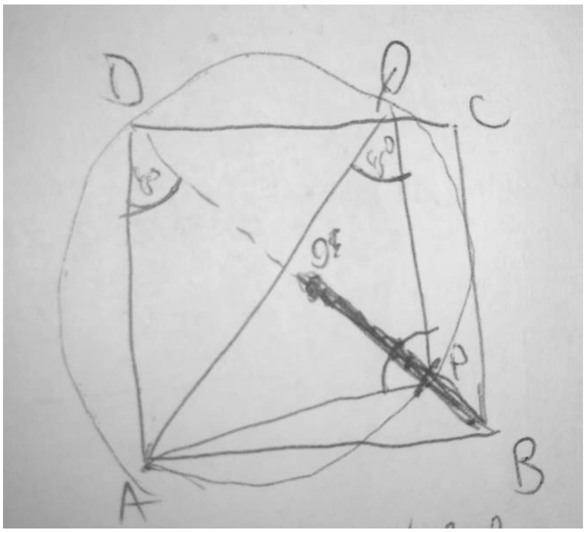
Ke každému bodu P z vyznačené množiny můžeme sestrojit z něj vycházející kolmici k AP protínající stranu CD. Tento průnik označíme Q a pomocí analogického využití obvodových úhlů a vztahů $|\sphericalangle ADO'| = 45°$ a $|\sphericalangle ADB| = 45°$ lze snadno zjistit, že trojúhelník APQ je skutečně rovnoramenný. Tím je existence množiny potvrzena.

Důkaz pro 1. případ:



Po sestrojení kolmice máme z obvodových úhlů $|\sphericalangle PQA| = |\sphericalangle O'DA| = 45°$.

Důkaz pro 2. případ:



Po sestrojení kolmice máme z obvodových úhlů $|\sphericalangle AQP| = |\sphericalangle ADO| = 45°$.