25th Duel - 2017
Category B Individual Solutions by Matouš Bílek, GJŠ Přerov

B–I–1

Problem

Let n be a positive integer and $a_{1,}a_n, \cdots, a_n$ be real numbers fulfilling the condition

$$a_1 \geq a_2 \geq \cdots \geq a_n.$$

Let us define $S_i = a_1 + a_2 + \cdots + a_i$ for all $i\ (2 \leq i \leq n)$. Prove that the inequality

$$\frac{S_{n-1}}{n-1} \geq \frac{S_n}{n}$$

holds. When does equality hold?

Solution

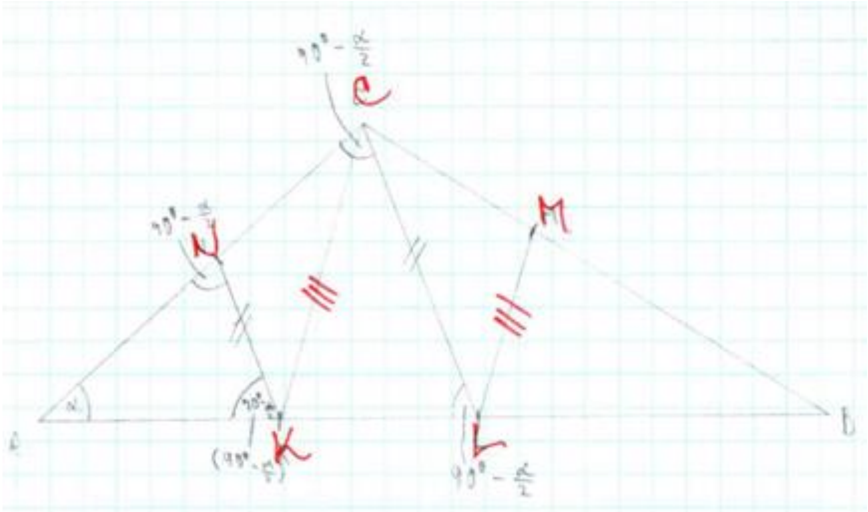
Protože $a_1 \geq a_2 \geq \ldots \geq a_n$, můžeme psát (1) $a_1 + \ldots + a_n - na_n \geq 0$ a můžeme tedy taky psát $\frac{a_1+\cdots+a_n-na_n}{n(n-1)} \geq 0$ a proto platí i $\frac{na_1+\cdots+na_{n-1}-(n-1)a_1-\cdots-(n-1)a_n}{n(n-1)} \geq 0$ což je akorát rozepsané $\frac{nS_{n-1}-(n-1)S_n}{n(n-1)} \geq 0$, což můžeme rozepsat jako $\frac{S_{n-1}}{n-1} - \frac{S_n}{n} \geq 0$, a proto platí i $\frac{S_{n-1}}{n-1} \geq \frac{S_n}{n}$. Vidíme zaroveň z (1), že rovnost nastává, právě když $a_1 = a_2 = \ldots = a_n$, což si můžeme ověřit: $\frac{(n-1)a_1}{(n-1)} = \frac{na_1}{n}$, což vidíme ($a_1 = a_1$), že platí.

B–I–2

Problem

We are given a triangle ABC with the longest side AB. Let K, L be points on the side AB such that $|AL| = |AC|$, $|BK| = |BC|$, and M, N be points on the sides BC, AC, respectively, such that $|BM| = |BL|$, $|AN| = |AK|$. Prove that the points K, L, M, N and C lie on the same circle.

Solution



Ze zadání víme, že |AN|=|AK|; |NC|=|KL|,….
Osa úhlu α tedy rozděluje ΔACL na 2 shodné trojúhelníky. Taky víme, že protože se rovnají |AC|=|AL| a taky |NA|=|AK|, tak tato osa protíná úsečky |NK| a |CL| v jejich středu a je k nim kolmá, takže |NK| je rovnoběžná s |CL| a samozřejmě tedy i |ML| s |CK|. To znamená, že KLCN je rovnoramenný lichoběžník a stejně tak i KLMC. A proto leží na jedné kružnici (1 společná strana a 1 společný vrchol), (víme, že rovnoramenné lichoběžníky jsou tětivové čtyřúhelníky). A tím je důkaz u konce. Vidíme totiž, že když je KLCN rovnoramenný lichoběžník, tak |∢CNL|=|∢LKC| a tedy je to tětivový čtyřúhelník – obvodové úhly, a proto i |∢KNL|=|∢KCL|. A když KLMC je rovnoramenný lichoběžník (|CM|=|KL| a |ML| je rovnoběžná s |CK|), tak zase |∢KLC|=|∢CMK| a tedy je to tětivový čtyřúhelník a tedy |∢LMK|=|∢LCK|=|∢KNL| a tedy jsou body K, L, M, N a C na jedné kružnici.

B–I–3

Problem

Prove that there exist infinitely many natural powers of 9 such that their decimal representations contain at least one even digit.

Solution

Sestavme si jednoduchou tabulku, kde si poznačíme poslední dvě číslice n-té mocniny čísla 9:

n	poslední dvě číslice
0	1
1	9
2	81
3	29
4	61
5	49
6	41
7	69
8	21
9	89
10	01
11	09
12	81
13	29
14	61
15	49
16	41
17	69
18	21
19	89
20	01

Z tabulky tedy ihned vyčteme, že se poslední dvě číslice n-té mocniny čísla 9 opakují s periodou 10. Vidíme, že všechny mají alespoň 1 sudou číslici (je jedno, je-li 0 sudá), a proto je takových čísel nekonečně mnoho.