

25th Duel - 2017
Category B Team Solutions, GJŠ Přerov

B–T–3

Problem

Albert and Zita are playing a game. On the table in front of them, there is a bowl with n coins. In each move, they are allowed to take 1, 2 or 3 coins from the bowl. They are never allowed to take the same number that the other has taken in the move before. (If Zita takes 2 coins, for example, Albert can only take either 1 or 3 coins in the next move.) Albert has the first move, and after that, they take turns. If Zita ever has a total number of coins divisible by 3, she wins. The game ends if Zita wins or when there are no more moves possible for the player whose turn would be next. Albert wins if Zita does not. Which player will win the game if both play with the best possible strategy? Describe their strategy and prove that this player will certainly win. For which values of n does Albert have a winning strategy, and for which values of n does Zita have a winning strategy?

Solution

Výherní strategie Zity:

Aby Zita nevyhrála hned svým prvním tahem, musí si Albert vzít tři mince. Poté si Zita bude brát jen po jedné minci, a při svém třetím tahu vyhraje, protože ji Albert nemůže zablokovat. Z toho vyplývá, že Zita má **jednoznačnou** výherní strategii pro $n \geq 11$. (pokud si Albert vezme v 5. tahu jen 2, tak pro $n \geq 10$)

- | | | |
|-----------------|----------------|------------------------------------------|
| 1. tah (Albert) | 3 mince | (aby Zita hned nevyhrála) |
| 2. tah (Zita) | 1 mince | |
| 3. tah (Albert) | 2 mince | (aby Zita neměla součet 3) |
| 4. tah (Zita) | 1 mince | |
| 5. tah (Albert) | 2 nebo 3 mince | (Zitu už stejně nemá možnost zablokovat) |
| 6. tah (Zita) | 1 mince | → součet = 3 → výhra |

Výherní strategie Alberta:

Aby Zita nevyhrála hned svým prvním tahem, musí si Albert vzít tři mince. Ať si Zita bude brát jakýkoliv počet mincí, musí ji bránit, aby nezískala počet mincí dělitelný třemi. Zita ale bude hrát svojí výherní strategií, proto nejvyšší n , pro které má Albert jednoznačnou výherní strategii, je $n = 10$. Albert má tedy jednoznačnou výherní strategii pro $n \leq 10$.

- | | | |
|-----------------|---------|------------------------------------|
| 1. tah (Albert) | 3 mince | (aby Zita hned nevyhrála) |
| 2. tah (Zita) | 1 mince | |
| 3. tah (Albert) | 2 mince | (aby Zita neměla součet 3) |
| 4. tah (Zita) | 1 mince | |
| 5. tah (Albert) | 3 mince | (aby pro Zitu nezbyla jedna mince) |

Kdo vyhraje?

Pokud je v misce mincí 10 nebo méně, vyhraje jednoznačně Albert, pokud je v misce mincí 11 a více, vyhraje jednoznačně Zita. (obojí za předpokladu, že oba hrají svojí nejlepší možnou strategií)