

25th Duel - 2017

Category C Individual Solutions by Darian Poljak, GJŠ Přerov

C-I-1

Problem

How many integers from the set $\{1, 2, \dots, 2017\}$ are divisible by 11 but not by 7?

Solution

Jelikož máme 2017 po sobě jdoucích čísel, počínaje 1, a 11 je dělitelné každé jedenácté číslo, zjistíme kolik čísel je dělitelných 11 vydělením 2017 jedenácti: $2017 : 11 = 183$

Je tam 183 čísel dělitelných 11, abychom však vyřešili příklad, musíme od 183 odečíst počet čísel, který byl dělitelný 11 i 7.

Nejmenší společný násobek čísel 11 a 7 je 77 ($11 = 11 \cdot 1$, $7 = 7 \cdot 1$, $77 = 11 \cdot 7$).

77 je sedmý násobek 11 a jelikož jsme měli po sobě jdoucí řadu čísel počínající 1, tak každé sedmé číslo dělitelné 11 je dělitelné i 7.

$$183 : 7 = 26$$

Bylo zde 26 čísel dělitelných 11 i 7, takže: $183 - 26 = 157$

157 čísel dělitelných pouze 11.

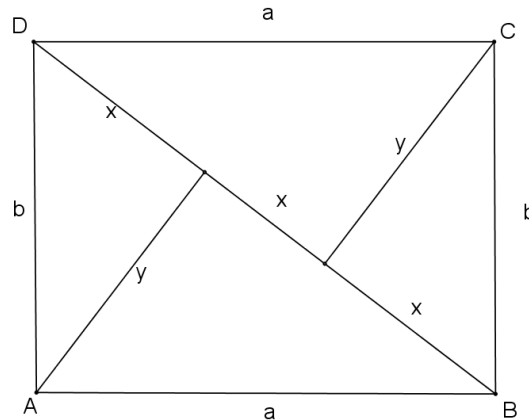
V této množině se nachází 157 čísel dělitelných 11, ale ne 7.

C-I-2

Problem

We are given a rectangle $ABCD$ with $|AB| = a > b = |BC|$. Let us suppose that the feet of the perpendiculars from the vertices A and C to the diagonal BD divide this diagonal into three congruent segments. Determine the ratio $a : b$.

Solution



Z Pythagorovy věty odvodíme vztahy:

$$x^2 + y^2 = b^2$$

$$(2x)^2 + y^2 = a^2 \rightarrow 4x^2 + y^2 = a^2$$

Odečtením obou rovnic a úpravou dostaneme vztah $3x^2 = a^2 - b^2$ (1)

Dále: $a^2 + b^2 = (3x)^2 \rightarrow 9x^2 = a^2 + b^2$ (2)

Ze vztahů (1) a (2) vyjádříme b^2 a porovnáme: $a^2 - 3x^2 = 9x^2 - a^2$
 $2a^2 = 12x^2$
 $a^2 = 6x^2$ (3)

Ze vztahů (1) a (2) vyjádříme a^2 a porovnáme: $3x^2 + b^2 = 9x^2 - b^2$
 $2b^2 = 6x^2$
 $b^2 = 3x^2$ (4)

Ze vztahů (3) a (4) vyplývá: $a^2 = 2b^2$

Protože jsou to druhé mocniny, tak $a : b = \sqrt{2} : 1$.

Poměr $a : b$ je $\sqrt{2} : 1$.

C-I-3

Problem

We are given a system of equations

$$x + cy = c$$

$$2x + 4y = 3$$

with unknowns x and y . Determine all possible values of the real parameter c such that the equation $4x - y = 2$ holds.

Solution

$$x + cy = c$$

$$2x + 4y = 3$$

$$4x - y = 2$$

Vyřešíme soustavu druhých dvou rovnic: $2x + 4y = 3 / \cdot 2$

$$4x - y = 2$$

$$4x + 8y = 6$$

$$4x - y = 2$$

Nyní od sebe rovnice odečteme: $9y = 4 \rightarrow y = \frac{8}{18}$

Dosadíme do:

$$2x + 4y = 3$$

$$2x = 3 - 4y$$

$$2x = \frac{54}{18} - \frac{32}{18}$$

$$x = \frac{11}{18}$$

Dosadíme do:

$$x + cy = c$$

$$\frac{11}{18} + c \frac{8}{18} = c$$

$$\frac{8}{18}c = c - \frac{11}{18}$$

$$c - \frac{8}{18}c = \frac{11}{18}$$

$$\frac{10}{18}c = \frac{11}{18}$$

$$c = \frac{11}{10}$$